In het vorige artikel heeft **Eric van Lit** de kansen op het voorkomen van de specifieke pokerhanden berekend. Maar met die kennis kun je nog niet pokeren. In dit tweede artikel wordt het zogenaamde pokercriterium afgeleid. Een formule waarmee met behulp van de verwachtingswaarde beslissingen tijdens het pokeren kunnen worden genomen.

Pokerwiskunde – beslissingen in poker

Inleiding[1]

Met de popularisering van poker, en met name de variant *Texas Hold 'Em*, is er een romantisch idee ontstaan van een spel dat door bluf en psychologie wordt gedomineerd. Een misvatting. De waarheid is dat professionele pokerspelers veel tijd besteden aan berekeningen en wiskundige modellen. De scheidslijn tussen verliezer en winnaar valt niet scherper te trekken: terwijl de verliezer zijn droom van een glorieuze overwinning in een paar uur in duigen ziet vallen, zit de geslepen pokerpro dagenlang aan de pokertafel om langzaam maar zeker winst te maken. Niet voor niets heet een verliezer een *fish*[2] en een winnaar een *shark*, dat komt omdat die winnaars zo gehaaid zijn! In het vorige artikel heb ik al laten zien dat de waardes voor pokerhanden niet arbitrair gekozen zijn, maar gebaseerd zijn op de relatieve zeldzaamheid van die pokerhand. In dit artikel zal ik een introductie geven in de beslissingsstragie van een professional, om zo te laten zien dat ook de mechanica van het spel beter te begrijpen is door wiskunde toe te passen.

Wat we hiervoor eerst moeten doen, is het spel op een formele manier definiëren, zoals elke goede wiskundige aan een probleem begint. We willen deze keer alleen kijken naar beslissingen die wij als speler kunnen maken, en of we op een bepaalde manier een rationele beslissing kunnen maken. Als eerste kunnen we ons dan afvragen wanneer we allemaal een beslissing moeten maken. Welnu, wanneer er *Texas Hold 'Em* wordt gespeeld, worden er eerst twee kaarten aan iedere speler individueel uitgedeeld, en mag iedere speler zeggen of hij meegaat of niet (als een speler meegaat, *callt*, dan legt hij de te betalen inzet in de pot, als hij meer neerlegt wordt dat de nieuwe inzet). De eerste beslissing valt dus preflop[3]. Na de flop is er weer een inzetronde, en dus weer een moment om te beslissen of u callt, foldt of verhoogt. De turn komt (er komt nog een kaart op tafel), en er is weer een inzetronde. Als laatste komt de river (er komt weer een kaart op tafel), en er is een laatste inzetronde. Telkens geldt dat als iemand verhoogt, alle andere spelers moeten bijzetten of folden. Als de rest foldt, krijgt degene die ingezet heeft de pot. Als er na de river nog steeds meerdere spelers zijn, dan komen de kaarten open op tafel en wint degene met de hoogste pokerhand. Dat ziet er dus als volgt uit:

Kaarten uitdelen	*beslissing*	(preflop)
-> Flop neerleggen	*beslissing*	(flop)
-> Turn neerleggen	*beslissing*	(turn)
-> River neerleggen	*beslissing*	(river)
-> kaarten openleggen	*beslissing*	

We zien dus dat er in een potje *Texas Hold 'Em* vier beslissingsmomenten zijn. Vergelijken we deze momenten met elkaar, dan vallen een aantal dingen op. Zo lijkt allereerst de beslissing op de River het makkelijkst, want op de River hoeven we niet meer te speculeren wat voor pokerhand we kunnen krijgen; we weten exact wat onze pokerhand is (het is de beste combinatie van vijf kaarten uit de vijf kaarten die op tafel liggen en de twee kaarten die u in uw hand heeft en alleen voor u zijn). Hebben we een goede pokerhand, dan callen (of verhogen) we, anders folden we. Een zelfde analyse lijkt op te gaan voor de preflopbeslissing. Aangezien we op dat moment nog niet weten welke kaarten op de flop, turn en river komen moeten we een heel algemene beslissing maken of we wel of niet meedoen. Vaak is het zo dat pas op de flop goed bepaald kan worden of u kan winnen of niet, vandaar dat we poker ook wel opdelen in preflop en postflop. Als laatste lijken de beslissingen op de flop en de turn min of meer hetzelfde en bovendien ook het meest uitdagend. Op deze posities hoeven we nu nog niet een goede pokerhand te hebben om te winnen, omdat er nog kaarten komen die de hand kunnen verbeteren. Aan de andere kant moeten we ook rekening houden met beslissingen die onze tegenstanders nemen. In dit artikel wil ik aandacht besteden aan postflopbeslissingen, en zal ik dus de beslissingen op de flop en de turn behandelen.

De flop en turn laten zich als volgt formaliseren:
– U heeft twee specifieke kaarten.
– De Flop heeft drie specifieke kaarten.
– In het geval dat we op de Turn zijn, heeft de Turn ook al een specifieke kaart.

– Er ligt een bepaald bedrag in de pot.
– We moeten een bepaalde inzet inleggen om in het spel te blijven.

Dit lijkt een flauwe opsomming, maar dat is het niet, want het zijn deze gegevens die nodig zijn om de volgende gegevens te berekenen:
– U heeft een bepaalde winkans (en dus ook verlieskans).
– U heeft een bepaalde winst.
– U heeft een bepaald verlies.

En zoals u misschien al zelf had bedacht, is het nu handig om deze beslissing als een waagstuk te zien, en kunnen we met deze gegevens de verwachtingswaarde uitrekenen om zo te kijken of het een gunstig waagstuk is. Ter herinnering, de verwachtingswaarde is het resultaat dat op de lange termijn gemiddeld per waagstuk wordt bereikt. Om een voorbeeld te geven, kunnen we een munt opgooien. Als u €1,- verliest bij kop, en €4,- wint bij munt en we gooien bijvoorbeeld honderd keer, dan zullen we (omdat een munt 50/50 is) ongeveer vijftig keer munt en vijftig keer kop gooien. Dus verliezen we vijftig keer €1,- en winnen we vijftig keer €4,-; het uiteindelijke resultaat is dus $50 \cdot 4 - 50 \cdot 1 =$ €150,-. Gemiddeld over honderd waagstukken is dat 150/100 = €1,50. De verwachtingswaarde is dus €1,50. Op geen enkel moment wint u €1,50, maar op de lange duur en gemiddeld genomen komt het daar wel op neer. Wiskundig kunnen we de verwachtingswaarde noteren als:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \times Uitk_i$$

voor n verschillende uitkomsten. Omdat de verwachtingswaarde een gemiddelde waarde geeft, volgt hieruit dat als de verwachtingswaarde positief is, het waagstuk gunstig is. Is de verwachtingswaarde negatief, dan is het waagstuk ongunstig. Om terug te komen op onze pokersituatie, hier berekenen we de verwachtingswaarde dus als: (*kans op winst*) · (*winst*) – (*kans op verlies*) · (*verlies*). Is deze waarde positief, dan callen we, anders folden we.

De gegevens

De *winst* is makkelijk te berekenen. Dat is simpelweg wat er in de pot ligt voordat u zelf heeft bijgelegd. Een klein voorbeeld. Stel dat er preflop €60,- in de pot is gekomen. U speelt tegen één tegenstander en die zet €20,- in. Nu moet u €20,- bijleggen om mee te gaan, terwijl er al €80,- in de pot zit. Als u wint, krijgt u dus €100,-, maar de effectieve uitbetaling is 100 - 20 = €80,-.
Het *verlies* is zo mogelijk nog makkelijker te berekenen. Als u verliest, bent u natuurlijk uw inzet kwijt, dus dit is het bedrag dat u moet bijleggen om te callen.

Maar hoe berekenen we de winkans? Laten we aannemen dat we niet willen bluffen en dus echt een betere pokerhand moeten hebben dan onze tegenstander om te winnen. Dan gaat het er allereerst om dat we inschatten wat onze tegenstander heeft. Dit is een inschatting die met een stukje psychologie en eventueel met statistiekprogramma's die data van gespeelde spelletjes opslaat en analyseert (zoals *Poker Tracker*) moet worden gemaakt. Na deze inschatting weten we wat voor pokerhand wij moeten hebben, namelijk één van de pokerhanden die de pokerhand van onze tegenstander verslaat. Bovendien hoeven we deze pokerhand pas te hebben op de river, daar wordt de uiteindelijke beslissing gemaakt. Om de kans hierop weer te geven is er het begrip *outs*. Een out is een kaart die op de turn of river u de winnende pokerhand geeft, zogezegd een 'uitweg'. Als u **A♣K♣** preflop kreeg gedeeld, en de flop is **Q♣J♣T♣**[4], dan heeft u al op de flop een Royal Flush, een pokerhand die niet te verslaan is. Aangezien er in totaal 52 kaarten zijn, en we er vijf hebben gezien, blijven er nog 47 over. Aangezien we al de hoogst haalbare pokerhand hebben, maakt het niet uit welke kaart op de turn of river valt, we hebben dus 47 outs en een winkans van 100%. Is de flop echter **9♣6♣5♥**, dan hebben we op de flop nog niets. Stellen we ons voor dat onze tegenstander een zeven en een acht, dus een Straight, heeft, dan zien we dat we op geen enkele andere manier kunnen winnen dan door een Flush te halen. Aangezien we al vier kaarten van klaver hebben, is deze kans heel reëel (missen we nog één kaart van een bepaalde pokerhand, dan noemen we dit een draw, in dit geval een flushdraw). Van de dertien kaarten die klaver zijn, hebben we er al vier en dus zijn er nog negen over die ons op de turn of river ons een winnende pokerhand kunnen geven. De kans hierop is als volgt te berekenen:
Kans op winst = kans op flushkaart op turn + kans op flushkaart op river + kans op fluskaart op turn en river
Tellen we dit uit, dan volgt:
kans op winst =

$$\frac{9}{47} \times \frac{38}{46} + \frac{38}{47} \times \frac{9}{46} + \frac{9}{47} \times \frac{8}{46} \times 100\% = 34,97\% .$$

In het algemeen kunnen we stellen:
kans op winst op flop =

$$\frac{x}{47} \times \frac{47-x}{46} + \frac{47-x}{47} \times \frac{x}{46} + \frac{x}{47} \times \frac{x-1}{46} \times 100\% .$$

kans op winst op turn = $\frac{x}{46} \times 100\%$ met x = *aantal outs*.

Hier volgt de volgende tabel uit:

Aantal outs	Winkans Flop	Winkans Turn
1	4,26%	2,17%
2	8,42%	4,35%
3	12,49%	6,52%
4	16,47%	8,70%
5	20,35%	10,87%
6	24,14%	13,04%
7	27,84%	15,22%
8	31,45%	17,39%

9	34,97%	19,57%
10	38,39%	21,74%
11	41,72%	23,91%
12	44,96%	26,09%
13	48,10%	28,26%
14	51,16%	30,43%

Deze tabel is uiteraard arbitrair uit te breiden, maar voldoet voor het moment[5]. We hoeven nu alleen onze outs te tellen en uit de tabel af te lezen hoeveel winkans ons dat geeft, handig toch? Bovendien is de kans op verlies uiteraard 100 – winkans, dus deze kunnen we ook direct aflezen. Een speciaal geval is als voor een bepaalde pokerhand zowel op de turn als op de river een bepaalde kaart moet vallen. Nu wordt:

$$\textit{kans op winst op flop} = \frac{x}{47} \times \frac{x-1}{46} \times 100\%\,,$$

en de *kans op winst op turn* = 0%. We noemen een dergelijke kans niet een draw, maar runner-runner *x*draw, met *x* een bepaalde pokerhand. Omdat we het aantal outs willen tellen om zo snel een indicatie te krijgen van onze winkans (zie tabel), rekenen we in een aparte tabel uit hoeveel outs we mogen optellen bij een aantal runner-runner draws. De outs krijgen we simpelweg door de kans te delen door de kans die één out oplevert.

Runner-runner draws	**Kans op Flop en equivalentie in outs**
Runner-runner Flushdraw	4,16% ≈ 0,978 outs (~ 1 out)
Runner-runner Open-ended[6] Straightdraw	4,44% ≈ 1,043 outs (~ 1 out)
Runner-runner Two Pair of Three of a Kinddraw	1,38% ≈ 0,326 outs (~ 0 outs)
Runner-runner Three of a Kinddraw	0,28% ≈ 0,065 outs (~ 0 outs)
Runner-runner Four of a Kind-draw	0,09% ≈ 0,022 outs (~ 0 outs)

We zien dat de meeste runner-runner draws zo weinig kans van slagen hebben dat we ze niet in outs kunnen uitdrukken. Voor een ruwe schatting van onze winkans is het dus alleen nodig om een extra out te tellen als we een runner-runner Flushdraw of een runner-runner Open-ended Straightdraw hebben.

We hebben hiermee voldoende informatie om de verwachtingswaarde te berekenen. Is de verwachtingswaarde positief, dan is het rationeel om te callen, is deze negatief, dan is het rationeel om te folden. Stel dat we €20,- moeten betalen op een pot van €80,- en we hebben alleen een flushdraw, dan is de verwachtingswaarde:
$0,3497 \cdot 80 + 0,6503 \cdot -20 = 14,97$. Dit is strikt groter dan 0 en dus is het, ook al hebben we niet meer dan een draw en nog geen echt goede pokerhand, rationeel om te callen.

Standaardisering

De methode zoals hierboven beschreven is sluitend, en om een ruwe schatting van onze winkans te krijgen effectief, maar is toch nog te arbeidsintensief om aan de pokertafel te gebruiken. Aan de pokertafel willen we in een splitsecond een beslissing kunnen maken; in dat geval zijn we vooral benieuwd of onze verwachtingswaarde significant hoger dan nul is, de exacte waarde doet er niet zo toe. Dit komt omdat veel van de gegevens die we niet met zekerheid kunnen invullen, zoals de hand van onze tegenstanders, alleen maar een schatting zijn waarop we niet tot ver achter de komma op kunnen vertrouwen. Alleen als de verwachtingswaarde duidelijk positief of duidelijk negatief is, hebben we een makkelijke beslissing te maken[7]. Zoals gezegd is de verwachtingswaarde gegeven door (*kans op winst*) · (*winst*) – (*kans op verlies*) · (*verlies*); schrijven we dit formeel op, dan krijgen we:

– y = pot zonder eigen inzet
– x = eigen inzet
– p = kans op winst, dus $(1-p)$ = kans op verlies

De verwachtingswaarde is dan: $p \cdot y - (1-p) \cdot x$.
Werken we de haakjes weg en stellen we de uitdrukking strikt groter dan nul, dan:
$p \cdot y - (1-p) \cdot x = p \cdot y - x + p \cdot x = p(y+x) - x > 0$
We kunnen aan beide kanten x optellen; dan krijgen we:
$p(y+x) > x$.
Delen we beide kanten door $(y + x)$, dan krijgen we:

$$p > \frac{x}{y+x}.$$

Deze ongelijkheid noemen we het *pokercriterium*.

Dit is een zeer handzame formule om snel een beslissing te maken of het rationeel is om te callen of niet. Het criterium zegt ons dat als de winkans strikt groter is dan de relatieve bijdrage die we moeten leveren aan de mogelijke uitbetaling als we winnen, het gerechtvaardigd is om te callen. Het is alsof we moeten bekijken of onze bijdrage te klein is om er een nulspel van te maken; we gaan als het ware 'goedkoop' mee omdat dit op de lange duur een zekere winst oplevert.
Van hier kunnen we ook zien waarom het zinnig is om een tabel uit te schrijven die tot 14 outs gaat. Uit de spelregels volgt namelijk dat $y > x$, want y = (*inzet tegenstander*) + (*preflop inzetten*) = x + (*preflop inzetten*) = $y = x + v$, de inzet van de tegenstander is namelijk gelijk aan x.
Dus $\frac{x}{y+x} < \frac{x}{2x}$ (= ½). Dus $\frac{x}{y+x}$ is altijd kleiner dan 0,5 dus als de winkans groter is dan 0,5 (dat is dus als we gelijk aan of meer dan 14 outs hebben op de flop) hoeven we $\frac{x}{y+x}$ niet eens meer te berekenen. In dat geval voldoet de situatie automatisch aan het criterium en kunnen we direct callen. Omdat we op de turn nog maar één kaart niet gezien hebben, is daar, als we het aantal outs gelijk houden, de winkans drastisch lager dan op de flop. Het

volgt automatisch dat in het geval van de turn we pas blind kunnen callen bij 23 of meer outs.

Een praktijkvoorbeeld

Laten we nu één voorbeeld bespreken om de kracht van deze methode te demonstreren. Stel, wij hebben **4♣3♣** en de Flop is **5♦2♠4♥**. Preflop is er €80 in de pot gegaan en onze tegenstander zet nu €60 in. De pot is dus €140 en wij moeten €60 betalen om mee te gaan. Is het verstandig om te callen? Dat hangt natuurlijk af van wat onze tegenstander heeft, maar afgaande op intuïtie zetten we hem op Two Pair of een Overpair[8]. We zien dat wij op dit moment alleen een Pair vieren hebben, dat is nog te weinig om te winnen. Met een 3 erbij zouden we Two Pair krijgen, maar het is niet duidelijk of dat een winnende hand is. We weten wel zeker dat we winnen als er nog een 4 komt, waardoor we Three of a Kind krijgen, of een Aas of Zes om een Straight te maken. Het aantal outs is dus: twee om een Three of a Kind te maken en vier plus vier om een Straight te maken, in totaal dus tien. We lezen uit de tabel af dat dit een winkans van 38,39% geeft.

Onze relatieve bijdrage is $\frac{60}{140+60} \times 100\% = 30\%$.

30 is strikt kleiner dan 38,39 en dus is het rationeel om te callen. Let ook op dat als we geen Three of a Kind draw hadden, maar alleen een Straight draw, onze winkans was gezakt naar 31,45%. Het verschil tussen 31,45 en 30 is maar marginaal en dus was de beslissing dan onduidelijk, ook al was het nog steeds gerechtvaardigd in de strikte zin.

Meer variabelen, beter resultaat

Tot nu toe hebben we een heel aantal aspecten aan onze beslissing buiten beschouwing gelaten, en het is de vraag of dat gerechtvaardigd is. Nu het geraamte van onze beslissingsstrategie staat, wordt het dan ook tijd om het probleem complexer te maken om zo tot een betere beslissing te kunnen komen. Het idee hierin is met name het grotere plaatje in de gaten te houden, omdat wat op microniveau in orde lijkt te zijn, op macroniveau wel eens negatief kan uitpakken. Een voorbeeld hiervan is de tegenstander confronteren met een inzet op de flop terwijl wij alleen een draw hebben (die voor ons een positieve verwachtingswaarde heeft). Als de tegenstander callt, is er niks aan de hand; verhoogt hij echter, dan moeten wij weer beslissen of we callen of niet. Die beslissing kan goed lijken, maar nemen we onze eigen eerste inzet mee dan zien we dat we eigenlijk niet gerechtigd waren om te callen. Zoals wel vaker, is een voorbeeld het beste om deze valkuil te demonstreren. Stel, preflop is er €40 in de pot gegaan; wij hebben een Flushdraw en kunnen alleen winnen door die draw te maken. We hebben dus op de flop 34,97% kans om te winnen. Als wij nu eerst aan de beurt zijn en we zetten €30 in, dan wordt de pot €70 en als onze tegenstander callt, wordt hij zelfs €100. Vanuit ons perspectief gezien, komt dit er op neer dat wij €30 hebben betaald voor een mogelijke winst van €70, procentueel gezien dragen we dus 30% bij aan de pot. Dit is strikt kleiner dan de winkans (34,97%) en dus is dit een rechtmatige beslissing (het voldoet aan het criterium). Dit voorbeeld laat zien dat het dus mogelijk is om rationeel te betten, ook al hebben we alleen maar een draw[9]. De valkuil is echter als onze tegenstander niet de €30 callt, maar verhoogt naar €80. De pot was voor hem €70, met zijn inzet erbij €150, en wij moeten nu nog €50 betalen om zijn inzet af te betalen.

$\frac{50}{150+50} \times 100\% = 25\%$ en dit is strikt kleiner dan 34,97% en dus lijkt het gunstig om te callen. Bekijken we echter de situatie in één keer, in plaats van twee afzonderlijke beslissingen, dan zien we dat we €80 moeten callen op een pot van €120.

Dit is een relatieve bijdrage van $\frac{80}{120+80} \times 100\% = 40\%$

en dit is duidelijk hoger dan de winkans met een Flushdraw! Door deze ene beslissing in tweeën te knippen, lijkt het in de afzonderlijke beslissingen een makkelijke keuze (de winkans was in beide gevallen veel groter dan de relatieve bijdrage); bezien we de situatie in één keer dan zien we dat dit geen gunstig waagstuk is en we er dus niet aan moeten beginnen. De fout zit hem erin dat we in eerste beslissing geen rekening houden met de mogelijke tweede situatie, en in de tweede situatie geen rekening houden met onze vorige beslissingen.

Hangen we een kans aan mogelijke scenario's, dan is het mogelijk om al op voorhand de beslissing door te rekenen en een rationeel besluit te nemen. Laten we het voorgaande voorbeeld nemen en vanuit psychologische observaties en intuïtie stellen dat onze tegenstander even goed kan verhogen naar €80, kan callen of kan folden. Een andere optie zien we onze tegenstander niet doen.

Dan kunnen we de mogelijke scenario's uitschrijven en de individuele verwachtingswaardes optellen.

- Als hij foldt, winnen we €40 met 100% kans.
- Als hij callt, winnen we €70 met 34,97% kans; we verliezen €30 met 65,03% kans.
- Als hij verhoogt, winnen we €120 met 34,97% kans; we verliezen €80 met 65,03% kans.

Totale verwachtingswaarde is dan:

$$\frac{1}{3}(1 \cdot 40) + \frac{1}{3}(0,3497 \cdot 70 - 0,6503 \cdot 30) + \frac{1}{3}(0,3497 \cdot 120 - 0,6503 \cdot 80) = 11,64$$

Dit is strikt groter dan nul en dus is onze inzet toch rationeel gerechtvaardigd. Dit kunnen we ook omdraaien door de kansen op de verschillende scenario's variabel te maken. Zo kunnen we bepalen hoe groot de kans mag zijn dat onze tegenstander verhoogt, om onze beslissing om in te zetten nog steeds rationeel te houden. Stellen we ons bijvoorbeeld het volgende voor:

– kans op folden: x
– kans op callen:[10] $3x$
– kans op verhogen: y

Met $x + 3x + y = 1$

Terwijl we van het bovenstaande ook weten dat geldt: $verwachtingswaarde = 40x + 4,97 \cdot 3x - 10,06 \cdot y$. We weten dat de verwachtingswaarde groter dan nul moet zijn, en uit de eerste vergelijking kunnen we halen dat geldt: $y = 1 - 4x$.

Invullen in de vergelijking geeft:
$54{,}91x - 10{,}06 + 40{,}24x > 0$

Dit is: $95{,}15x > 10{,}06$ en dus: $x > \frac{10,06}{95,15} = 0{,}106$.

Invullen in de herleide formule geeft:
$y = 1 - 4 \cdot 0,106 = 0{,}577$. Omdat x groter moet zijn dan 0,106, moet y dus kleiner zijn dan 0,577 om de verwachtingswaarde positief te houden. Dus is het rationeel om in te zetten als we inschatten dan onze tegenstander hoogstens zal verhogen naar 80 met een kans die kleiner is dan 0,577.
Het ligt echter meer voor de hand dat een tegenstander of foldt, of verhoogt. In dat geval wordt de vergelijking, als we $x = 1 - y$ gebruiken:
$verwachtingswaarde = 40 - 40 \cdot y - 10,06 \cdot y > 0$.

Dus $-50,06 \cdot y > -40$, dus $y < \frac{40}{50,06} = 0,799$.

In dit geval moeten we er dus zelfs van overtuigd zijn dat onze tegenstander gaat verhogen met een kans van 0,799 of hoger; dat is dan wel een erg agressieve speler! Zelf inzetten is in deze gevallen dus geheel gerechtvaardigd, maar wel alleen vanwege de doorrekening van de scenario's, niet vanwege de twee beslissingen (inzetten en callen) afzonderlijk.

Consequenties

Het is duidelijk dat we hier in kunnen blijven schuiven en afwegen wat we willen, iets wat ik dan ook graag aan uw eigen onderzoekende geest overlaat. Wat op dit moment wel een waardevolle toevoeging is, is om de consequenties voor het spel in het licht van deze factoren uit te leggen. Zoals we zagen bij de situatie waarin wij als eerste aan de beurt waren en overwogen om iets in te zetten, gaat het er om dat we meerdere beslissingen tegelijk moeten evalueren. Dit kom even goed naar voren in de relatie van flop en turn. De winkans die we toekennen aan een bepaald aantal outs op de flop is gebaseerd op het scenario dat we zowel de turn als de river zien. Beslissingen op de flop moeten dus absoluut met beslissingen op de turn in verband worden gebracht, anders vallen we alsnog in de valkuil dat we één beslissing in tweeën knippen. Zogezegd is het logisch om poker te zien als preflopbeslissing, postflopbeslissing en eindbeslissing: op de turn kunnen we hoogstens bijsturen wat we op de flop al hebben besloten. Een sluitender pokercriterium is dus de volgende ongelijkheid:

$$p > \frac{x_{flop} + x_{turn}}{v + 2 \cdot x_{flop} + 2 \cdot x_{turn} + z_{river}}$$

Met
p = winkans flop,
x_{flop} = inzet op flop,
x_{turn} = inzet op turn,
v = pot op de flop vooraf aan inzetten,
z_{river} = inzet van tegenstander op river.

Deze z_{river} heeft geen tegenhanger in de teller omdat er van wordt uitgegaan dat we op de river met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid kunnen inschatten of we een betere pokerhand hebben of niet. Als we een betere pokerhand hebben, valt er nog een inzet van onze tegenstander te winnen, hebben we een slechtere pokerhand dan hoeven we niet te callen en hebben we dus niets te verliezen.

Aangezien we alleen $\frac{x_{flop}}{y + x_{flop}}$ met zekerheid kunnen uitrekenen, vergt het accuraat en snel evalueren van het criterium veel ervaring. In de meeste gevallen liggen x_{turn} en z_{river} in het interval $(x_{flop}, 2 \cdot x_{flop})$.

Als vuistregel kan dus als bovengrens de volgende breuk worden genomen:

$$\frac{3 \cdot x_{flop}}{v + 7 \cdot x_{flop}},$$

waarbij geldt dat $v + x_{flop} = y$ en $x_{turn} = z_{river} = 2 \cdot x_{flop}$. We zien dus dat hoe hoger de inzetten worden, hoe minder invloed de preflopinzetten v uitmaken. Bovendien zien we dat als ook de z_{river} naar nul gaat, de breuk dichter bij $\frac{1}{2}$ komt. Door het criterium te evalueren met een te hoge relatieve bijdrage en een te lage winkans kunnen we een conservatieve beslissing nemen. In beginsel is het uiteraard het beste om schattingen zoveel mogelijk op statistische gegevens te baseren.

In het voorgaande is er steeds (stilzwijgend) van uitgegaan dat we maar met één tegenstander te maken hebben. Dit is met name om het criterium handzaam te houden. Voor de volledigheid volgt hier het criterium in zijn meest algemene vorm, waaruit u ongetwijfeld wel kunt opmaken dat een beslissing bijzonder snel zeer gecompliceerd kan worden.

Verwachtingswaarde =

$$\sum_{a=1}^{b} P_{Winst_a} \cdot (y + \sum_{j=1}^{q} p_j \sum_{i=1}^{k} p_i (i \cdot x_{Flop_j})$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} p_j \sum_{i=1}^{l} p_i (i \cdot x_{Turn_j})$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} p_j \sum_{i=1}^{m} p_i (i \cdot z_{River_j}))_a$$

$$- \sum_{j=1}^{q} p_j \sum_{i=1}^{k} p_i (i \cdot x_{Flop_j})$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} p_j \sum_{i=1}^{l} p_i (i \cdot x_{Turn_j})$$

Let hier bij op dat op de flop er *k* callers zijn, op de turn *l* en op de river *m*. Bovendien hou je op de flop *q* verschillende inzetten voor mogelijk, op de turn *r* en op de river *s*. Daarnaast is ook de winkans variabel gemaakt omdat we, geconfronteerd met verschillende tegenstanders, waarschijnlijk niet eenduidig outs kunnen tellen.

Geconfronteerd met zo'n formule is het direct duidelijk wat de eigenlijke uitdaging is van *Texas Hold 'Em*; het zo vaardig en zuiver mogelijk verkrijgen van waardes van variabelen die we in het criterium in kunnen vullen. Een nuttig middel is hierbij om alleen in situaties verzeild te raken die een vereenvoudigd criterium vereisen. Dat gebeurt bijvoorbeeld als we tegen minder tegenstanders spelen of als we als laatste aan de beurt zijn. In het eerste geval hoeven we simpelweg minder scenario's door te rekenen, in het tweede geval hebben we op de flop al exacte gegevens over de eerste dubbele sommatie. Aan de pokertafel is een exacte berekening geen doen en daarom rekenen echte professionals allerlei mogelijke scenario's thuis al door en onthouden ze de uitkomsten. Komen ze aan de pokertafel een vergelijkbare situatie tegen, dan kunnen ze met de vooraf berekenende uitkomsten beslissen of ze meegaan.

Voor ons gewone stervelingen is het misschien verstandiger het criterium $p > \frac{x}{y+x}$ in eerste instantie te gebruiken om te kijken of het rationeel is om te folden. Dit komt omdat, rekening houdend met mogelijke inzetten op de turn, onze relatieve bijdrage ($\frac{x}{y+x}$) groter kan uitvallen dan deze nu is op de flop. Als het getal aan de rechterkant van de vergelijking nu al groter is dan het getal aan de linkerkant (de winkans), dan zal dat als we op voorhand al rekening houden met de turn alleen maar meer waar zijn.

Conclusie

Aan een rationele beslissing nemen in poker ligt een grondige wiskundige kennis ten grondslag, zoveel is duidelijk. We hebben vastgesteld dat het in ieder geval niet rationeel is om te callen als $p < \frac{x}{y+x}$ geldt. Andersom, als $p > \frac{x}{y+x}$ geldt, moeten we de mogelijke acties van andere spelers op de flop en turn eerst nog meerekenen voordat we compleet overtuigd kunnen zijn van een call. Een verbeterd criterium is dan ook:

$$p > \frac{x_{flop} + x_{turn}}{y + 2 \cdot x_{flop} + 2 \cdot x_{turn} + z_{river}}.$$

Om een juiste beslissing te maken, heb ik al meerdere malen genoemd dat we hiervoor vooral moeten zorgen in situaties te komen waarin we een makkelijke beslissing kunnen maken. In het volgende artikel zal ik hier meer over uitleggen en het hebben over de preflopbeslissing, om te laten zien dat dit een cruciaal beslissingsmoment is in het spel. Voor nu wens ik u veel succes aan de pokertafel!

Eric van Lit, student Wiskunde, Universiteit Utrecht
Columnist voor Poker Magazine

Noten

[1] Dit artikel is een geschreven versie van een gastcollege gegeven op het departement Wiskunde, Universiteit Utrecht. Bij het gastcollege hoorde ook een inleveropgave die te bereiken is op: http://www.fifkikker.com/Inleveropgave Pokerwiskunde.pdf. De oplossing is bij de auteur op te vragen.

[2] Andere bijnamen voor een verliezer zijn: 'donor', 'pinautomaat' of 'dood geld'.

[3] De flop is het moment dat er drie kaarten op tafel gelegd worden, die iedereen mag gebruiken om een pokerhand te maken.

[4] De Q is van 'Queen', in het Nederlands 'Vrouw'. De J staat voor 'Jack', in het Nederlands 'Boer'. Een T is een 'Tien' (10).

[5] In het vorige artikel meldde ik al dat het tegen de intuïtie van veel mensen in gaat dat een Flush meer waard is dan een Straight, en zagen we waarom de Flush toch meer waard is. Hier zien we waar de verkeerde intuïtie vandaan komt: een Flush heeft negen outs en een Straight maar acht, in het postflopspel heeft een Flushdraw dus grotere kans om in een Flush te veranderen dan een Straightdraw in een Straight! Het venijn ligt hem er natuurlijk in dat het preflop moeilijker is een Flushdraw te maken dan een Straightdraw.

[6] Drie aaneengesloten kaarten zoals **7♥8♣9♦**.

[7] Door nog voor de flop (dus preflop) goede beslissingen te nemen, kunnen we er voor zorgen dat we op de flop en turn bijna uitsluitend met makkelijke beslissingen te maken hebben.

[8] Een Overpair is een Pair dat hoger is dan welke kaart dan ook op tafel. Dat kan dus alleen als onze tegenstander een Pair in zijn handen heeft.

[9] Dit is wat men noemt een semibluf: het is een bluf

omdat je nog geen winnende hand hebt en dus blij mag zijn als je de pot er mee wint, terwijl als de tegenstander callt je altijd nog een substantiële kans hebt op winst. In de regel is elke goede bluf een semibluf; bluffen met 0% winkans is niet heel slim.

[10]Dat de kans op callen precies drie keer groter is dan folden en dat er in de overige keren wordt verhoogd, is helaas nog steeds een aanname die we moeten maken.