Nog meer speltheorie, maar van een geheel ander kaliber. Is poker een gok- of een behendigheidsspel? In een reeks van artikelen gaat **Eric van Lit** de lezer in ieder geval behendiger maken in de wiskundige benadering. In dit artikel wordt berekend hoe vaak alle pokerhanden voorkomen.

Pokerwiskunde

Inleiding

Veel mensen spelen het pokerspel op een intuïtieve manier. Wat veel spelers echter niet weten, is dat poker (eigenlijk net als elk ander spel) een grote wiskundige basis en achtergrond heeft. In dit artikel zal ik laten zien dat wiskunde verstrekkende gevolgen kan hebben voor het inzicht in het pokerspel *Texas Hold 'Em*. Ik zal dit aan de hand doen van een voorbeeld, namelijk een kleine analyse van het fenomeen 'pokerhanden'. Ik heb hiervoor gekozen omdat het aan de ene kant duidelijk resultaten laat zien, maar aan de andere kant nog goed te volgen is. Waarschijnlijk zal niet alles in een keer duidelijk zijn, in dit geval is het het beste om terug te bladeren naar het punt waar u het nog wel kunt volgen en vanaf daar weer opnieuw de argumentatie op te pakken. Op deze manier zult u zien dat aan het einde van het artikel u niet alleen de conclusies weet, maar juist ook weet waarom deze conclusies waar zijn.

Wat u al zou moeten weten

In dit artikel ga ik ervan uit dat u al bekend bent met het spel *Texas Hold 'Em* Poker. Zo zal ik verschillende termen niet extra toelichten, aangezien deze al elders zijn beschreven. Het enige wat nodig is om dit artikel te kunnen lezen, is eigenlijk een goed verstand. Voordat ik verder ga, wil ik echter wel een resultaat behandelen dat wijd verspreid bekend is onder pokerspelers, dat is de Fundamentele Pokerstelling van David Sklanksy, door velen gezien als *de* autoriteit op het gebied van poker op dit moment.

Stelling 1: Sklansky's Fundamentele Pokerstelling

> Elke keer dat u een hand verschillend speelt van de manier waarop u hem zou spelen als u alle kaarten van de tegenstander wist, maken uw tegenstanders winst; en elke keer dat u een hand op dezelfde manier speelt zoals u hem zou spelen als u alle kaarten kon zien, verliezen zij. Omgekeerd, elke keer dat uw tegenstanders hun handen verschillend spelen van de manier waarop ze hem zouden spelen als ze uw kaarten konden zien, maakt u winst; en elke keer dat ze hun handen op dezelfde manier spelen zoals ze hem zouden spelen als ze uw kaarten zagen, verliest u.

Het lijkt misschien een triviale stelling, maar in wezen is hij erg krachtig. Eerst en vooral toont het aan dat *Texas Hold 'Em* een spel van onvolledige informatie is. U kent de kaarten van uw tegenstanders niet en het is precies dit element dat *Texas Hold 'Em* tot een gokspel maakt. Hoe beter u kunt veronderstellen wat uw tegenstander heeft, hoe dichter u het 'ideale spel' kunt spelen en hoe meer u een uitstekende pokerspeler wordt. In poker bent u niet verplicht om wat te zeggen, u kunt chips in de pot doen of uw kaarten aan de dealer geven en iedereen weet wat u bedoelt. Maar u kunt geen poker spelen zonder iets met uw chips te doen; u moet folden, callen, betten of raisen! Door het wedgedrag (samen met de kaarten die op tafel liggen) te analyseren, kunt u een vrij goed idee hebben of u zou moeten folden, callen, betten of raisen. Laten we nu een begin maken met te kijken op wat voor manier wiskunde gebruikt kan worden in poker.

Pokerhanden

Texas Hold 'Em is uiteindelijk een spel om pokerhanden, en een pokerhand bestaat uit vijf kaarten. Het is waar dat als u wedt en iedereen foldt, u de pot krijgt zonder uw kaarten te moeten tonen (en inderdaad, in de meeste spelen is er geen showdown) maar het mag duidelijk zijn, het is uw hoofddoel om een goede pokerhand te krijgen.

Waarschijnlijk kent u alle pokerhanden al wel, maar hier een kort lijstje voorbeelden om uw geheugen op te frissen.

- Royal Flush **T♣ J♣ Q♣ K♣ A♣**
- Straight Flush **4♦ 5♦ 6♦ 7♦ 9♦**
- Four of a Kind / Quads **7♥ 7♦ 7♠ 7♣ J♣**
- Full House **T♥ T♦ T♣ J♦ J♠**
- Flush **2♠ 6♠ 7♠ J♠ K♠**
- Straight 8♥ 9♦ T♦ J♣ Q♥
- Three of a Kind / Set **3♥ 3♦ 3♣ 5♥ K♥**
- Two Pair **6♦ 6♣ A♥ A♠ 4♠**
- Pair **K♠ K♣ 5♥ 8♥ T♦**
- High Card **A♣ 6♣ 8♦ T♠ Q♥**

Wanneer sommige spelers gelijkwaardige handen hebben, bijvoorbeeld als zij allebei twee paar hebben, dan wint de speler met het hoogste paar. Het gebeurt soms dat sommige spelers zelfs het paar, twee paar of een set gelijk hebben (dit kan gebeuren als het paar, twee paar of de set alle kaarten zijn die op tafel liggen). In dit geval worden de andere kaarten in de pokerhand behandeld als high card (ook genoemd 'kicker'). Wanneer een paar spelers echt dezelfde pokerhand voorstellen is het een split pot.

Merk nu op dat er vier soorten in een dek zitten, ♥ ♦ ♠ ♣. Elke soort heeft dertien kaarten, nummer 2 tot 10, een Boer, een Vrouw, een Heer en een Aas. Dat betekent dat er in totaal 52 kaarten zijn. Als u ze achter elkaar op tafel zou leggen, hoeveel combinaties kunt u maken? Goed, voor de eerste kaart zijn er 52 mogelijkheden. Maar dan blijven er slechts 51 kaarten in uw hand over en dus heeft u voor de volgende kaart maar 51 mogelijkheden. Als u dit steeds weer herhaalt, zullen er uiteindelijk 51 kaarten op tafel liggen en hebt u slechts één kaart over in uw hand. Dus voor de laatste kaart hebt u slechts één mogelijkheid. Dit betekent dat het totale aantal verschillende combinaties dat u met 52 kaarten kunt maken, gelijk is aan $52 \times 51 \times 52 \times \ldots \times 2 \times 1$, wiskundig kunt u dit als een factor schrijven, $n!$. Dit geeft ons onze eerste conclusie:

Conclusie 1

Het totaal aan verschillende combinaties die men kan maken met 52 kaarten is $52! = 8.06581752 \times 10^{67}$.

Dat is een gigantisch getal en ik zou dit dan ook niet thuis uitproberen. Zoals we zeiden, een pokerhand bestaat uit vijf kaarten. Laten we Ω introduceren als de verzameling van alle pokerhanden. Een goede vraag zou kunnen zijn hoeveel exact verschillende pokerhanden er zijn. Wiskundig gezien is deze vraag hetzelfde als afvragen hoeveel elementen Ω heeft. Wel, men zou kunnen zeggen dat er voor de eerste kaart 52 mogelijkheden zijn, voor de tweede 51, voor de derde 50, enzovoort. Dit zou leiden tot de berekening:

$$|\Omega| = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311.875.200,$$

Maar in feite is dit niet juist. Bekijk de volgende twee pokerhanden:

3♦ 8♦ 9♣ K♠ K♥ en 9♣ 8♦ K♠ 3♦ K♥

Kunt u me het verschil vertellen? Het enige waarneembare verschil is de rangschikking van de kaarten, maar is die schikking echt belangrijk als we pokerhanden bestuderen? Uiteraard niet, beide handen zijn gelijk en dus hebben we pokerhanden teveel geteld, twee maal zoveel of misschien wel meer. Hoeveel meer precies? Nu, vijf kaarten kunnen op $5! = 120$ manieren geschikt worden. Dus het is in te zien dat we elke pokerhand 119 keer teveel hebben geteld. Dit komt er op neer dat het enige wat we weten is $|\Omega| \times 120 = 311.875.200$. Nu is de oplossing simpel, we hoeven alleen maar 311.875.200 door 120 te delen en we zouden onze gewenste $|\Omega|$ moeten krijgen.

Conclusie 2

Laat Ω de verzameling van alle pokerhanden zijn. Dan is het totaal van distinct verschillende combinaties van vijf kaarten genomen uit 52 kaarten gelijk aan

$$|\Omega| = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2.598.960$$

In woorden betekent dit dus dat het aantal pokerhanden bijna 2,6 miljoen is. Wat we in de wiskunde gewend zijn is om resultaten te generaliseren zodat we ze op meerdere manieren kunnen gebruiken. Dit is dan ook precies wat we hier gaan doen.

Stelling 2

Het Binomiaal-Coëfficient: Het aantal manieren dat men k objecten kan kiezen uit n objecten, zonder dat de volgorde uitmaakt, is:

$$\frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \ldots \times 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

als

$$n \geq k \geq 0$$

Bewijs

Laten we eerst eens kijken naar de vergelijking aan de linkerzijde. Wat zegt deze? De teller is het aantal mogelijke combinaties dat u met k kunt maken uit n voorwerpen, wanneer de volgorde relevant is. Dit was bijvoorbeeld onze eerste berekening van het aantal verschillende pokerhanden. Nu is de noemer het aantal mogelijke combinaties met k voorwerpen. Zoals we met onze bespreking over pokerhanden zagen is dit de $5! = 120$ waarmee we kwamen. Dus fundamenteel is dit enkel dezelfde berekening die wij bij conclusie 2 deden, maar nu zijn er in plaats van aantallen, variabelen. Als u deze formule gebruikt en $n = 52$ en $k = 5$ neemt, krijgt u uiteraard precies conclusie 2.

Nu weten we wat Ω is. Een andere interessante vraag is wat de structuur van deze verzameling is. Wiskundig gesproken zijn we geïnteresseerd of we een partitie kunnen maken op Ω, daar bedoelen we mee of er een Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n bestaat, zodat

$$\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n = \Omega \text{ en } \Omega_i \cap \Omega_j = 0 \text{ (met } i \neq j \text{.}$$

Natuurlijk weten we dat er inderdaad zo'n partitie is, namelijk de verschillende soorten pokerhanden die we eerder opsomden! Hier is een definitie van de partitie:

- RF = {alle royal flushes}
- SF = {alle pure straight flushes}
- FK = {alle four of a kinds}
- FH = {alle full houses}
- Fl = {alle pure flushes}
- St = {alle pure straight}
- TK = {alle pure three of a kinds}
- TP = {alle pure two pairs}
- OP = {alle pure one pairs}
- HC = {alle pure high cards}

Met puur bedoel ik dat deze hand niet ook in een andere verzameling kan zitten, bijvoorbeeld, een royal flush is uiteraard een flush maar is dus geen element van de verzameling Fl. Uiteraard kunnen we concluderen dat:

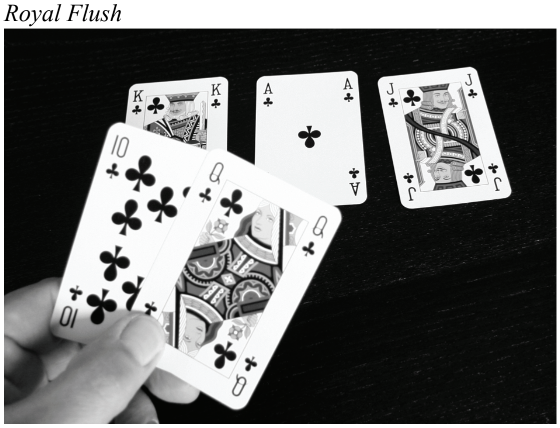
$$RF \cup SF \cup FK \cup FH \cup Fl \cup St \cup TK \cup TP \cup OP \cup HC = \Omega$$

Een ander voorbeeld is een partitie op de verzameling van alle 52 kaarten, Λ. Kies:
- $\tilde{\heartsuit}$ = {alle kaarten van harten}
- $\tilde{\diamondsuit}$ = {alle kaarten van ruiten}
- $\tilde{\clubsuit}$ = {alle kaarten van klaveren}
- $\tilde{\spadesuit}$ = {alle kaarten van schoppen}

Het is duidelijk dat dit een partitie is op Λ , we noemen deze deelverzamelingen 'soortverzamelingen', en met $\tilde{\imath}$ bedoelen we dus zo'n soortverzameling.
In feite is dit niet de enige partitie op Λ die intuïtief duidelijk is. Hier is een andere:
- $\tilde{2}$ = {alle tweetjes}
- $\tilde{3}$ = {alle drietjes}
- $\tilde{4}$ = {alle viertjes}
- $\tilde{5}$ = {alle vijfjes}
- $\tilde{6}$ = {alle zesjes}
- $\tilde{7}$ = {alle zevens}
- $\tilde{8}$ = {alle achten}
- $\tilde{9}$ = {alle negens}
- $\tilde{T}$ = {alle tienen}
- $\tilde{J}$ = {alle boeren}
- $\tilde{Q}$ = {alle vrouwen}
- $\tilde{K}$ = {alle heren}
- $\tilde{A}$ = {alle azen}

Wederom is het duidelijk dat dit een partitie is; deze deelverzamelingen noemen we 'waardeverzamelingen' en met $\tilde{\jmath}$ wordt zo'n waardeverzameling aangegeven. Laten we nu eens naar iedere deelverzameling van Ω kijken en proberen te achterhalen hoeveel elementen iedere deelverzameling heeft.

Royal Flush



Natuurlijk is de royal flush het makkelijkst te berekenen. Een royal flush is de hoogst mogelijke straight flush en aangezien er maar vier soorten zijn en elke soort maar één hoogste straat kan hebben (namelijk T-J-Q-K-A), moeten er wel in totaal precies vier royal flushes zijn!

Conclusie 3

Het aantal royal flushes is $|RF| = 4$

Straight Flush
Laten we eerst tellen hoeveel straten er gemaakt kunnen worden om daarna dit te combineren met de eis dat de hand ook een flush moet zijn. Straten zijn vijf opeenvolgende kaarten; A–5, 2–6, 3–7, 4–8, 5–9, 6–10, 7–J, 8–Q, 9–K and T–A. Tien in totaal en aangezien er vier soorten zijn, maakt dit 40 straight flushes in totaal. Maar merk op dat we de royal flush hadden gedefinieerd als de hoogst mogelijke straight flush. |RF| = 4, en dus zijn er 40 – 4 = 36 straight flushes.

Conclusie 4

Het aantal straight flushes is $|SF| = 4 \times 10 - 4 = 36$

Four of a Kind/Quads
Opnieuw kost de berekening weinig moeite. Er zijn dertien verschillende waardeverzamelingen, dus er zijn dertien verschillende four of a kinds. Maar we moeten niet vergeten dat een pokerhand uit vijf kaarten bestaat, niet vier. Nu kan deze vijfde kaart om het even welke zijn van de overige kaarten 52 – 4 = 48. Dus eigenlijk bestaat elke four of a kind uit 48 verschillende pokerhanden, elke met een verschillende kicker. (Bijvoorbeeld, wat als de flop 8♣ 8♦ 8♠ geeft en de turn 8♥ komt? Nu heeft iedereen een four of a kind en degene met de hoogste kicker zou winnen). Zo is het totale aantal four of a kinds 13 × 48. Merk op dat we dit ook als

$$13 \times \binom{4}{4} \times \binom{48}{1}$$

kunnen schrijven, aangezien we inderdaad vier kaarten van een waardeverzameling en één kaart van de resterende 48 kaarten willen nemen. Het is vrij duidelijk, dat als u n objecten van een verzameling met n elementen wilt nemen, er slechts één manier is dit te doen: door alle elementen van de verzameling te nemen. Eveneens is het duidelijk dat als u één object van een verzameling met n elementen wilt nemen, u n mogelijkheden hebt om dit te doen. Laten we nu teruggaan naar onze berekening van four of a kinds en besluiten:

Conclusie 5

Het aantal *four of a kinds* is $|FK| = 13 \times 48 = 624$

Full House
Om het aantal full houses te berekenen, hebben we al wat meer wiskunde nodig. we moeten bovendien goed oppassen om verwarring te voorkomen. Een full house heb je wanneer je van één waarde drie kaarten hebt en van een

andere waarde twee kaarten. Dus wat we in principe moeten doen, is drie kaarten van één waardeverzameling nemen en twee van een andere waardeverzameling. Duidelijk is dat stelling 2 ons kan helpen. De berekening wordt:

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ en } \binom{4}{2} = 6$$

Het maakt niet uit welke waardeverzamelingen we kiezen, zolang ze maar verschillend zijn. Dit betekent dat zodra we de waardeverzameling van de three of a kind kiezen (waar we dertien verschillende waardeverzamelingen voor hebben), we automatisch twaalf waardeverzamelingen overhouden om de andere twee kaarten uit te kiezen. Onze uiteindelijke berekening wordt nu:

$$13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3774$$

En we kunnen concluderen:

Conclusie 6

Het aantal *full houses* is

$$|FH| = 13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3774$$

Flush

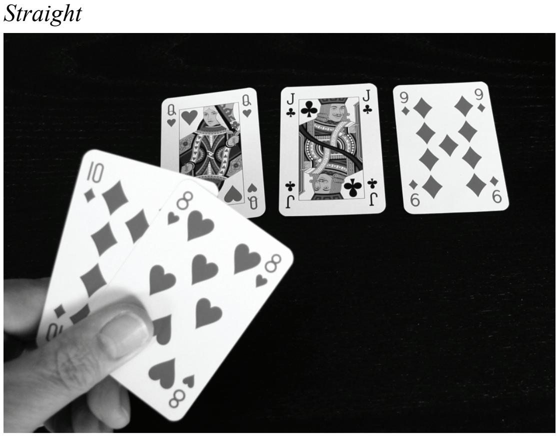
Nu moeten we kijken naar soortverzamelingen. Van één soort hebben we vijf kaarten nodig. Aangezien er dertien kaarten in een soort gaan en er vier soorten zijn, betekent dit dat de berekening $4 \times \binom{13}{5} = 5148$ al erg op het goede antwoord lijkt.

We moeten alleen nog *RF* en *SF* er vanaf halen en dan kunnen we zeggen dat:

Conclusie 7

Het aantal flushes is $|Fl| =$
$4 \times \binom{13}{5} - |RF| - |SF| =$
$5148 - 4 - 36 = 5108$

Straight



We weten al dat er tien verschillende straights zijn (A-5, 2-6, 3-7, 4-8, 5-9, 6-10, 7-J, 8-Q, 9-K en T-A). We moeten in de gaten houden dat voor iedere kaart in een straight er drie andere kaarten zijn die dezelfde straight maken (de andere soorten). Dus iedere straat kan op $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ manieren gemaakt worden. Vermenigvuldig dit met 10 en haal weer *RF* en *SF* eraf en dan komen we op het totaal aantal straights.

Conclusie 8

Het aantal straights is $|St| = 10 \times 4^5 - |RF| - |SF| =$
$10240 - 4 - 36 = 10.200$

Three of a Kind

Een pokerhand is een *three of a kind* als deze drie kaarten van dezelfde waardeverzameling bevat en twee precies verschillende kaarten. Als we drie kaarten van een waardeverzameling willen hebben, berekenen we $\binom{4}{3}$. Dit vermenigvuldigen we met 13 (het aantal waardeverzamelingen), daarna met 48 (het aantal kaarten beschikbaar voor de vierde kaart) en als laatste met 44 (het aantal kaarten beschikbaar voor de vijfde kaart). Deze laatste twee kaarten kunnen op 2! = 2 verschillende manieren geordend worden en dus moeten we nog eens delen door 2. We kunnen dan concluderen dat:

Conclusie 9

Het aantal *three of a kinds* is $|TK| =$

$$13 \times \binom{4}{3} \times \frac{48 \times 44}{2!} = 54912$$

Two Pair

Nu moeten we eerst twee kaarten van een waardeverzameling hebben, en daarnaast twee kaarten van een andere waardeverzameling. We weten dat als we twee kaarten pakken uit vier, dit $\binom{4}{2}$ mogelijkheden geeft.

Voor het eerste paar hebben we dertien waardeverzamelingen, dus voor het tweede twaalf (merk ook op dat de volgorde van de paren niet uitmaakt en dus moeten we nog delen door 2!). Voor de vijfde kaart hebben we nog $52 - 4 - 4 = 44$ kaarten over en als we al deze resultaten combineren krijgen we:

Conclusie 10

Het aantal *two pairs* is $|TP| =$

$$\frac{13 \times \binom{4}{2} \times 12 \times \binom{4}{2}}{2!} \times 44 = 123552$$

One Pair

We zijn bijna klaar! We moeten twee kaarten van een waardeverzameling pakken en drie precies verschillende kaarten (en volgorde maakt niet uit, dus delen we weer door 3! = 6). Dus voor de pair hebben we $13 \times \binom{4}{2}$ en voor de andere drie kaarten hebben we

$$\frac{(52-4) \times (52-4-4) \times (52-4-4-4)}{3!} = \frac{48 \times 44 \times 40}{6}$$

We kunnen concluderen dat:

Conclusie 11

Het aantal *one pairs* is $|OP|$ =
$$13 \times \binom{4}{2} \times \frac{48 \times 44 \times 40}{3!} = 1098240$$
Dat betekent dat bijna de helft van alle pokerhanden wel een pair bevat!

High Card

Nu moeten we alleen nog het aantal pokerhanden berekenen dat alleen een high card is. We willen pairs en three of a kinds vermijden, dus de berekening $\frac{52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36}{5!}$ ziet er al goed uit. In deze berekening zitten echter wel alle flushes, straights, straight flushes en royal flushes, dus deze moeten we er nog afhalen.

$$\frac{52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36}{5!} - |RF| - |SF| - |Fl| - |St| =$$

$$\frac{52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36}{5 \times 4 \times 3 \times 2} - 4 - 36 - 5108 - 10200 = 1302540 .$$

We hebben er nogal wat van afgehaald en misschien heeft u dat wel aan het denken gezet voor een andere manier om het aantal high card pokerhanden te berekenen. Die andere berekening is: $|HC| = |\Omega| - |RF| - |SF| - |FK| - |FH| - |Fl| - |St| - |TK| - |TP| - |OP|$.

In feite, als het resultaat van deze berekening hetzelfde is als de vorige berekening, hebben we hiermee meteen de andere berekeningen gecontroleerd, omdat geldt dat:
$\Omega = RF \cup SF \cup FK \cup FH \cup Fl \cup St \cup TK \cup TP \cup OP \cup HC$
en hieruit volgt dat: $|\Omega| = |RF| + |SF| + |FK| + |FH| + |Fl| + |St| + |TK| + |TP| + |OP| + |HC|$.

Als we de berekening doen, krijgen we: 2.598.960 – 4 – 36 – 624 – 3.744 – 5.108 – 10.200 – 54.912 – 123.552 – 1.098.240 = 1.302.540, en dit is inderdaad hetzelfde als de vorige berekening!

Conclusie 12

Het aantal *High Cards* is $|HC| = \frac{52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36}{5!}$
$- |RF| - |SF| - |Fl| - |St| =$
$$\frac{52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36}{5 \times 4 \times 3 \times 2} - 4 - 36 - 5108 - 10200 = 1302540 .$$

Een grote hoeveelheid pokerhanden bestaat uit niets anders dan een high card!

Conclusie

Hier is een tabel met de resultaten die we gevonden hebben, zodat we alles eens op een rijtje kunnen bekijken: .

Naam van de pokerhand	**Aantal combinaties**
Royal flush	4
Straight flush	36
Four of a kind	624
Full house	3.744
Flush	5.108
Straight	10.200
Three of a kind	54.912
Two pair	123.552
One pair	1.098.240
High card	1.302.540
Totaal aantal pokerhanden	2.598.960

Uit deze korte analyse van pokerhanden kunnen we dus uiteindelijk snappen waarom de regels van poker (met betrekking tot sterkte van pokerhanden) zijn zoals ze zijn. Er is namelijk voor gekozen om zeldzamere combinaties sterker te maken dan minder zeldzame combinaties, een regel die intuïtief eerlijk is. Een vaak gehoorde frustratie aan tafel waarom een straight nou toch minder waard is dan een flush, is hiermee verklaard. In mijn optiek is begrip van het mechanisme achter een conclusie het begin van een grondige bevatting van het spel (en daarmee een begin om een winnende speler te worden).

In een volgend artikel zal ik dieper ingaan op een beslissingsstrategie op Flop, Turn en River. Voor wie die drie termen nietszeggend zijn hoop ik dat dit artikel u heeft weten te verleiden om er meer over te weten te komen.

Eric van Lit,
student Wiskunde, Universiteit Utrecht
en columnist voor Poker Magazine.

Literatuur

Meester, R. (2003). *A Natural Introduction to Probability Theory*. Basel: Birkhäuser Verlag.
Sklanksy, D. (1999). *The Theory of Poker*.
Sklanksy, D. (1999). *Hold 'Em Poker for Advanced Players, 21st century edition*. Henderson: Two Plus Two Publishing.